Kajian Teoritis Persamaan Medan Gravitasi Einstein dengan Transformasi Metrik Schwarzschild dalam Sistem Dua Koordinat

[1)] Sabam P. Simbolon [2)]Tenang Ginting [3)]Tua Raja Simbolon
Jurusan Fisika Teoritis– Fakultas MIPA USU
[1]Mahasiswa FISIKA FMIPA
[2]Dosen Pembimbing FISIKA FMIPA
[3]Departemen FISIKA FMIPA
Jl. Bioteknologi No 1 USU
Email: simbolonsabam@yahoo.com

ABSTRAK

Telah dilakukan kajian teoritis mengenai transformasi metrik Schwarzschild dalam sistem dua koordinat, pengkajian transformasi metrik Schwarzschild dalam sistem dua koordinat ini, yaitu koordinat kartesian dan ruang- waktu dipercepat seragam dalam ruang waktu datar serta efek lokal suatu medan gravitasi pada ruang lengkung. Medan gravitasi pada ruang lengkung ini dipilih medan Schwarzschild yang biasanya dinyatakan dalam ruang spasial bola. Melalui transformasi tersebut, metriknya mengandung dua suku : (1) suku yang berhubungan dengan elemen garis dalam kerangka dipercepat seragam, dan (2) suku yang berhubungan dengan kelengkungan serta berkaitan dengan penyimpangan geodesik yang merupakan efek dari kelengkungan ruang waktu. Sehingga dari hasil yang diperoleh memperlihatkan adanya kesamaan antara massa gravitasi dan massa inersial yang kaitannya dengan Teori Relativitas Umum dapat menjelaskan efek lokal dalam suatu medan gravitasi.

Kata kunci : transformasi, koordinat, metrik Schwarzschild

ABSTRACT

Teoritical studies have been made regarding the transformation of the Schwarzschild metric in two coordinates, the Schwarzschild metric transformation study in two coordinates: coordinates Cartesian and accelerated time-space uniform in no time flat spaces as well as local effects of a gravitational field in curved space. Gravitational field in curved space is chosen the Schwarzschild field is usually expressed in spatial space balls. Through these transformations, their metrics contain two people: (1) the rates associated with elements within the framework of the accelerated line uniform, and (2) the tribe associated with the curvature and geodesic deviation with regard to the effect of the curvature of space time. So that the results obtained from the existence of similarities between inertial mass and gravitational mass are relation with the theory of general relativity can explain local effect in the gravitational field.

Key words: Transformation, coordinates, Schwarzschild's metric

1. Latar Belakang

Karl Schwarzschild adalah seorang ilmuan astronomi Jerman yang pertama kali memecahkan persamaan medan gravitasi Einstein secara eksak pada tahun 1916, yang dimaksud dengan pemecahan medan gravitasi Einstein adalah beliau mendapatkan komponen-komponen tensor metrik g dari kuadrat metriknya ds^2 ruang waktu lengkung yang memenuhi hubungan antara persamaan medan Einstein. Metrik yang didapat Schwarzschild ini dalam teori kerelatifanya disebut dengan metrik Schwarzschild. Teori Relativitas Umum (TRU) Einstein adalaah teori yang menyatakan bahwa gravitasi bukan seperti halnya gaya lain, namun gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruang-waktu karena adanya penyebaran massa dan energi didalam ruang waktu tersebut. Teori Relativitas Umum (TRU) ini dibangun oleh dua asas, yaitu yang pertama : Asas kesetaraan (Principle of equivalence) dan yang kedua adalah kovariansi umum (General Covarince). Asas kesetaraan berbunyi, "Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (Lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara". Salah satu impliksai asas kesetaraan adalah kesamaan massa gravitasi dan massa inersia. Sifat ini memungkinkan untuk menghilangkan efek gravitasi yang muncul dengan menggunakan kerangka acuan yang sesuai. Hal ini merupakan konsekuensi dari medan gravitasi yaitu semua benda yang berada di dalamnya akan merasakan percepatan yang sama serta tidak bergantung pada ukuran maupun massanya. (Rinto Anugraha, 2005)

Salah satu fondasi teori relativitas umum adalah prinsip kesetaraan (*principle of equivalence*). Ohanian (1977) menyatakan bahwa ada dua jenis prinsip kesetaraan. Jenis pertama adalah prinsip kesetaraan lemah (*weak principle of equivalence*) yang menyatakan bahwa dalam suatu medan gravitasi, seluruh partikel uji dengan kecepatan awal yang sama akan jatuh dengan percepatan yang sama. Jenis yang kedua adalah prinsip kesetaraan kuat (*strong principle of equivalence*) yang berbunyi, dalam seluruh laboratorium yang jatuh bebas serta tak berotasi, hasil- hasil dari sembarang percobaan lokal adalah sama, tidak tergantung dari medan gravitasi yang berada di sekitar laboratorium tersebut.

1.1 Tujuan Penelitian

1. Untuk mengkaji prinsip Teori Relativitas Umum yang diterapkan di dalam transformasi metrik Schwarzschild ke dalam sistem dua koordinat.
2. Untuk mengkaji prinsip kesetaraan pada kesamaan antara Massa Gravitasi dan Massa Inersial.
3. Untuk mengkaji hubungan antara kerangka dipercepat seragam dalam ruang waktu datar serta efek lokal suatu Medan gravitasi pada ruang lengkung.

1.2 Manfaat Penelitian

1. Sebagai sumber pustaka mengenai transfomasi metrik Schwarzschild
2. Sebagai penambahan wawasan bagi penulis maupun pembaca mengenai transfomasi metrik Schwarzschild.
3. Sebagai sumber informasi mengenai prinsip kesetaraan yang membawa konsekuensi pada kesamaan antara massa gravitasi dan massa inersial.

1.3 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana hubungan antara kerangka dipercepat seragam dalam ruang waktu datar serta efek lokal suatu medan gravitasi dengan menggunakan transformasi metrik Schwarzschild.

1.4 Batasan Masalah

a. Penjelasan Teori Relativitas Umum (TRU) tentang transformasi metrik Schwarzschild dalam dua koordinat.
b. Prinsip kesetaraan konsekuensi pada kesamaan antara Massa Gravitasi (MG) dan Massa Inersial (MI).
c. Hubungan antara kerangka dipercepat seragam dalam ruang waktu datar serta efek lokal suatu medan gravitasi pada ruang lengkung.

II. Tinjauan Pustaka

2.1 **Teori Relativitas Umum Einstein**

Tensor adalah besaran yang merupakan perluasan dari vektor, seperti halnya vektor merupakan perluasan dari besaran skalar. Tensor memiliki komponen-komponen seperti halnya vektor. Besaran vektor sangat penting dalam fisika karena ia menyatakan objek dengan kaedah-kaedah yang tetap sama meskipun kerangka acuan yang dipilih berubah-ubah. Perubahan kerangka acuan memang menyebabkan nilai komponen tensor berubah pula, namun kaedah-kaedah yang berlaku bagi komponen tensor tetap tidak berubah.

Teori relativitas umum adalah salah satu teori fisika modern yang cukup besar peranannya dalam menerangkan struktur ruang waktu dan jagad raya. Teori ini adalah teori yang indah memiliki daya pikat ramalan terhadap gejala alam yang cukup menarik, namun memiliki persyaratan matematika berupa analisis tensor. Karena itu akan disajikan analisis tensor sebagai jembatan untuk memahami teori relativitas umum.

2.2 Prinsip Ekuivalensi

Ketika Newton merumuskan hukum gerak dan hukum gravitasinya, ia mendefenisikan massa inersial dan massa gravitasi. Massa inersial diukur berdasarkan ukuran kelembaman suatu benda terhadap gaya dorong atau gaya tarik yang bekerja, sedangkan massa gravitasi diukur berdasarkan pengaruh gaya gravitasi pada benda tersebut. Para eksperimentalis sejak zaman Newton hingga pertengahan abad ke-20 telah berusaha membuktikan kesetaraan antara kedua jenis massa tersebut. Dengan percobaan yang paling terkenal adalah percobaan Eotvos yang membuktikan bahwa kedua massa tersebut setara. Berdasarkan bukti eksperimen tersebut, akhirnya Einstein menyimpulkan dalam postulatnya yang terkenal dengan nama Prinsip Ekuivalensi Massa bahwa,"Gaya gravitasi dan gaya inersial yang bekerja pada benda tunggal adalah sama dan tidak terbedakan (*indistinguisable*) satu sama lain". Konsekuensinya adalah bahwa tidak ada lagi kerangka acuan inersial.

2.3 Prinsip Kovariansi Umum

Akibat prinsip ekuivalensi massa yang menyebabkan tidak adanya kerangka acuan inersial, maka prinsip relativitas khusus menyatakan bahwa hukum-hukum fisika berlaku sama pada kerangka acuan inersial tidaklah berlaku umum. Oleh karena itu, Einstein merumuskan postulat keduanya yang terkenal dengan nama Prinsip Kovariansi Umum yang menyatakan bahwa,"*Semua hukum-hukum fisika berlaku sama pada semua kerangka acuan tanpa kecuali*". Konsekuensinya adalah setiap besaran fisika haruslah dinyatakan dalam bentuk umum dan tidak bergantung pada koordinat dimana ia didefenisikan. Artinya semua besaran fisika harus dinyatakan dalam bentuk tensor. Seperti di dalam relativitas khusus, hukum-hukum gerak dinyatakan dalam bentuk yang invarian terhadap transformasi Lorentz dengan konsekuensi diperkenalkannya konsep ruang dan waktu dimensi 4 dengan metrik Minkowski. Generalisasinya, teori relativitas umum menyatakan bahwa hukum-hukum fisika harus invarian terhadap transformasi umum dengan konsep ruang-waktu 4 dimensi.

2.4 Asas Kesetaraan

Dalam teori kerelativan umum Albert Einstein mengemukakan asas kesetaraan, yang merintis jalan pencetusan teori kerelativan umum lima tahun kemudian. Teori ini pada dasarnya menyatakan," bahwa semua hukum fisika bersifat mutlak atau tak ubah terhadap setiap pengamat, termasuk yang bergerak dengan percepatan. Salah satu hukum fisika sederhana untuk menyatakan ini, yakni "hukum kelembaman". Menurut hukum ini, apabila semua gaya yang bekerja pada semua benda yang meniadakan pengaruh, maka benda tersebut akan berada pada keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan yang arah atau besarnya tetap. Einstein mengemukakan asas kesetaraan pada tahun 1911 yang mengatakan bahwa: dalam sistem pengamatan yang jatuh bebas dalam gaya berat (sistem ketaklemabaman), hukum fisika tetap berlaku seperti halnya dalam sistem pengamatan tanpa medan gaya berat (Sistem kelembaman) dan bahwa gaya kelembaman (atau khayal) setara dengan gaya berat. Karena gaya kelembaman bergantung pada massa ukuran dan gaya berat bergantung pada massa ukuran berat , maka asas kesetaraan diatas mengungkapkan bahwa kedua jenis massa ini sebenarnya adalah setara, atau lebih tegas lagi sama besar.

Dalam teori kerelativan umum Albert Einstein mengemukakan asas kesetaraan, yang merintis jalan pencetusan teori kerelativan umum lima tahun kemudian. Teori ini pada dasarnya menyatakan," bahwa semua hukum fisika bersifat mutlak atau tak ubah terhadap setiap pengamat, termasuk yang bergerak dengan percepatan. Salah satu hukum fisika sederhana untuk menyatakan ini, yakni "hukum kelembaman". Menurut hukum ini, apabila semua gaya yang bekerja pada semua benda yang meniadakan pengaruh, maka benda tersebut akan berada pada keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan yang arah atau besarnya tetap.

2.5 Teori Relativitas Umum dalam Metrik Schwarzschild

Penerapan Teori Relativitas Umum dalam persamaan gravitasi Einstein yang mengabaikan tetapan kosmologi yang dirumuskan sebagai berikut :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) T_{\mu\nu} \qquad (2.1)$$

Dengan persamaan diatas akan diterapkan untuk menelaah beberapa gejala alam. Pertama kali akan diturunkan solusi persaam gravitasi Einstein untuk objek statik bermassa M yang diletakkan pada pusat koordinat dengan pemilihan koordinat empat dimensi berupa tiga dimensi koordinat ruang polar (r , θ , ϕ) dan satu dimensi koordinat waktu (t), yang dikenal sebagai solusi Schwarzschild.

Berikut ini akan diturunkan metrik yang mendiskripsikan medan gravitasi isotropik statik. Agar lebih mudah diperoleh, metrik ruang waktu 4 dimensi (3 dimensi ruang dan 1 dimensi waktu) akan dirumuskan dalam wakilan koordinat bola. Dalam koordinat bola, 3 koordinatnya adalah

$$x^m = (x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi) \qquad (2.2)$$

Metrik ruang waktu datar dalam wakilan koordinat bola diberikan oleh

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \qquad (2.3)$$

Dalam mengikuti penulisan Weinberg, nilai c sementara diisikan sama dengan 1 sehingga metrik diatas menjadi

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.4)$$

Selanjutnya akan ditinjau metrik untuk medan gravitasi isotropik statik. Tensor metrik untuk medan tersebut, yang dalam hal ini untuk komponen g_{tt} dan g_{rr} hanya merupakan fungsi radial r. Bentuk metriknya menjadi

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

Dimana metrik diatas akan kembali ke metrik Minkowski jika sumber medan gravitasi dilenyapkan. Dari metrik diatas, komponen tensor metrik kovarian yang tak lenyap adalah

$$g_{tt} = -B(r), g_{rr} = A(r)\ , g_{\theta\theta} = r^2$$
$$g_{\phi\phi} = r^2 sin^2\theta \quad (2.6)$$

Mengingat $g_{\mu v}$ bersifat diagonal, komponen tensor metrik kontravarian bernilai

$$g^{tt} = -\frac{1}{B(r)}\ , g^{rr} = \frac{1}{A(r)}\ , g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$$
$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \quad (2.7)$$

Selanjutnya determinan matriks yang menyajikan komponen tensor metrik adalah g yang bernilai

$$g = -A(r)B(r)\ r^4 sin^2\theta \quad (2.8)$$

3.1 Konsekuensi Prinsip Kesetaraan

Prinsip kesetaraan yang membawa konsekuensi pada kesamaan antara massa gravitasi (m_G) dan massa inersial (m_I) (Wospakrik, 1987). Misalnya sebuah benda bermassa m jatuh di dalam medan gravitasi dengan percepatan gravitasi sebesar g. Dengan memilih koordinat (z, t), menurut Newton persamaan gerak benda tersebut adalah

$$m_I \frac{d^2 z}{dt^2} = m_G g \quad (3.1)$$

Melalui transformasi

$$z^{'} = z - \frac{1}{2} g t^2\ dan\ t^{'} = t \quad (3.2)$$

Pada koordinat $(z^{'}, t^{'})$, persamaan (3.2) diatas menjadi

$$m_I \frac{d^2 z'}{dt'^2} + m_I = m_G\ g \quad (3.3)$$

Karena massa inersial sama dengan massa gravitasi maka,

$$m_I \frac{d^2 z'}{dt'^2} = 0 \quad (3.4)$$

Jadi kita dapat memilih kerangka acuan inersial (z',t') untuk menghilangkan efek gravitasi pada kerangka (z,t) . Atau dengan kata lain, kerangka (z,t) adalah kerangka dipercepat dengan percepatan sebesar g terhadap kerangka inersial (z',t') pada daerah tanpa medan gravitasi.

Salah satu aplikasi prinsip ini adalah keadaan orang yang melemparkan sebuah benda yang berada dalam lift yang putus talinya. Ketika lift tersebut jatuh bebas (demikian pula dengan orang tersebut), orang tersebut di kerangka lokalnya akan melihat bahwa benda yang ia lepaskan akan diam (inersial) terhadap dirinya. Kesimpulannya adalah hukum gerak pada kerangka inersial dalam daerah tanpa medan gravitasi sama dengan hukum gerak pada kerangka jatuh bebas di dalam medan gravitasi. Hal ini membawa kita pada asas kovariansi umum yang berbunyi, “Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sebarang pemilihan transformasi koordinat”.

Implikasi dari penerapan kedua asas ini akan menuntun kita pada beberapa ramalan yang mengubah cara pandang kita tentang ruang waktu. Dengan konsep yang baru, Teori Relativitas Umum benar-benar memberikan pandangan yang baru sama sekali mengenai ruang-waktu. Konsep bahwa ruang waktu dapat melengkung jika di dalamnya terdapat materi massif memberikan beberapa implikasi baru. Salah satunya adalah jika cahaya bintang melewati sebuah benda langit massif seperti matahari, maka ramalan teori relativitas umum adalah cahaya bintang tersebut akan dibelokan di sekitar matahari tersebut. Membeloknya cahaya bintang tersebut bukan disebabkan oleh tertariknya cahaya bintang karena pengaruh gaya gravitasi matahari, melainkan ruang waktu di sekitar matahari tersebut melengkung.

Pada pasal berikut akan disinggung hubungan antara kerangka dipercepat seragam dalam ruang-waktu datar serta efek local suatu medan gravitasi pada ruang lengkung. Medan gravitasi pada ruang lengkung ini dipilih medan Schwarzschild yang biasanya dinyatakan dalam ruang spatial berkoordinat bola. Dari ruang berkoordinat bola tersebut dilakukan transformasi ke dalam koordinat kartesan dengan titik awal di koordinat (0,0,R) . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ungkapan metrik Schwarzschild tersebut mengandung dua suku : (1) suku pertama berkorespondensi dengan elemen garis dalam kerangka dipercepat beraturan dalam ruang- waktu datar (*flat space- time*) (2) suku kedua mengandung unsur kelengkungan (*curvature*) yang dihubungkan dengan penyimpangan geodesik.

3.2 Penyelesaian metrik Schwarzschild dan Transformasi Metriknya

Dengan hubungan affine (*affine connection)* atau lambang Christoffel dapat dihitung dengan menggunakan formula :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right\} \quad (3.5)$$

Dengan persamaan diatas dan metrik yang diberikan oleh persamaan (2.6) dan (2.7), komponen lambang Christoffel yang tak lenyap bernilai

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{r sin^2\theta}{A(r)}$$

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -sin\theta cos\theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = cot\theta$$

Dan

$$\Gamma^{t}_{tr} = \Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}$$

Lebih lanjut, dibutuhkan besaran tensor Ricci yang dirumuskan sebagai

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} \quad (3.6)$$

Dari lambang-lambang Christoffel diatas, komponen-komponen tensor Ricci diberikan sebagai

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\frac{B'(r)}{B(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\frac{A'(r)}{A(r)}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)}$$

$$R_{\varphi\varphi} = sin^2\theta R_{\theta\theta}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\frac{B'(r)}{A(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\frac{B'(r)}{A(r)}$$

Dan

$$R_{\mu\nu} = 0 \; untuk \; \mu \neq \nu \quad (3.7)$$

Pada persamaan-persamaan diatas, tanda aksen berarti turunan/derivative ke r. Dari hasil diatas, komponen $R_{r\theta}, R_{r\varphi}, R_{t\theta} R_{\theta t} dan \; R_{\theta\varphi}$ lenyap , serta $R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} sin^2\theta$ yang menunjukkan konsekuensi dari invarinasi terhadap transformasi rotasi pada metrik tersebut. Sementara itu R_{rt} lenyap akibat konsekuensi adanya invariasni bentuk metrik ketika dilakukan transformasi pembalikan waktu $t \to -t$.

Selanjutnya persamaan medan gravitasi Einstein akan diterapkan untuk metrik isotropik statik tersebut. Persamaan medan gravitasi Einstein untuk ruang kosong tersebut berbentuk

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Hubungan dari persamaan antara R_{rr} dan R_{tt} dapat ditulis menjadi

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \quad (3.8)$$

Dengan menerapkan persamaan $R_{\mu\nu} = 0$, maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \quad (3.9)$$

Atau

$$A(r)B(r) = konstan \quad (3.10)$$

Selanjutnya syarat batas untuk A dan B adalah bahwa untuk $r \to \infty$, bentuk metrik isotropik statik tersebut harus kembali kebentuk metrik Minkowski dalam koordinat bola, yang berarti

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1 \quad (3.11)$$

Dengan syarat batas ini hubungan antara A(r) dan B(r) dapat dituliskan secara lebih eksplisit dalam bentuk

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \quad (3.12)$$

Adapun komponen tensor Ricci yang lain pada persamaan $R_{rr}\ dan\ R_{\theta\theta}$ dapat dituliskan menjadi

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r) + B(r) \quad (3.13)$$

Dan

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{R_{\theta\theta}}{2rB} \quad (3.14)$$

Yang dengan mengingat bahwa $R_{\theta\theta} = 0$ maka

$$rB' + B = \frac{d}{dr}(rB) = 1 \quad (3.15)$$

Solusi persamaan diferensial diatas adalah

$$rB(r) = r + tetapan \quad (3.16)$$

Untuk menentukan nilai tetapan integrasi diatas, kita mengetahui bahwa untuk jarak yang cukup jauh dari pusat massa M yang terletak dipusat koordinat O, komponen $g_{tt} = -B$ harus bernilai mendekati –(1+2U) dengan U adalah potensial Newton benda bermassa M pada jarak r yang bernilai $U = -GM/r$. Jadi nilai tetapan integrasi diatas adalah -2GM, sehingga

$$B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (3.17)$$

Dan

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (3.18)$$

Akhirnya bentuk metrik isotropik statik untuk ruang waktu 4 dimensi berkoordinat bola adalah

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.19)$$

Bentuk metrik ini pertama kali diturunkan oleh K.Schwarzschild pada tahun 1916. Karena itu, metrik ini sering disebut metrik Schwarzschild . Bentuk metrik tersebut masih mengisikan nilai c=1. Apabila nilai c diisikan, bentuk metrik Schwarzschild menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.20)$$

Bentuk $2GM/c^2$ sering disingkat menjadi m (bersatuan panjang), sehingga metrik diatas menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.21)$$

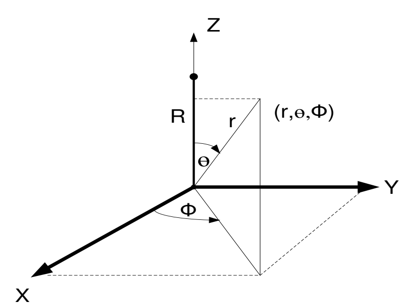
Metrik Schwarzschild ini bersifat simetri bola dan merepresentasikan medan gravitasi diluar suatu partikel bersimetri bola dengan pusat partikel terletak pada pusat koordinat bola. Solusi persamaan gravitasi Einstein untuk partikel simetri bola statik, tak berotasi, tak bermuatan diberikan dalam bentuk metrik Schwarzschild. Metrik tersebut dalam koordinat–4 x^μ =(ct, r, θ, ϕ) dinyatakan dalam bentuk

$$c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.22)$$

Dengan

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (3.23)$$

dan *M* adalah massa partikel statik bersimetri bola di O. Jika massa partikel tersebut dilenyapkan (*M* = 0), metrik (3.22) akan kembali ke bentuk metrik ruang-waktu Minkowski. Metrik Minkowski ini merupakan metrik ruang-waktu datar karena dengan melakukan transformasi dari koordinat bola ke koordinat Kartesian akan diperoleh metrik dengan tensor metrik sama dengan delta Kronecker. Selanjutnya dilakukan transformasi ke koordinat kartesian (*x, y, z*) dengan pusat di sumbu *z* pada jarak *R* dari O yang dirumuskan sebagai



Gambar 3.1 Koordinat Bola

$$x = r\,sin\theta\,cos\phi\,, y = r\sin\theta\,sin\phi$$
$$z = rcos\theta - R \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) diatas dapat ditulis menjadi

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2) + (z + R)^2} \quad (3.25)$$

Dengan mengambil diferensialnya persamaan (3.25), sehingga diperoleh

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z+R}{r}dz \qquad (3.26)$$

Yang jika dikuadratkan menghasilkan

$$dr^2 = \frac{x^2dx^2+y^2dy^2+(z+R)^2dz^2+2xydxdy+}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$\frac{2x(z+R)dxdz + 2y(z+R)dydz}{x^2+y^2+(z+R)^2} \qquad (3.27)$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (3.24) maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} dx &= sin\theta cos\phi\, dr + rcos\theta cos\phi\, d\theta - rsin\theta sin\phi\, d\phi \\ dy &= sin\theta sin\phi\, dr + rcos\theta sin\phi\, d\theta + rsin\theta cos\phi\, d\phi \\ dz &= cos\theta\, dr - rsin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

Dengan mengkuadratkan jumlah persamaan (3.28.) diperoleh

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \qquad (3.29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.25), (3.27) dan (3.29) ke dalam pers. (3.22) diperoleh

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right)c^2dt^2 +$$
$$\left[1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right]^{-1} \frac{x^2dx^2+y^2dy^2+}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$\frac{(z+R)^2dz^2+2xydxdy+2x(z+R)dxdz+2y(z+R)dydz}{x^2+y^2+(z+R)^2} + dx^2 +$$
$$dy^2 + dz^2 - dr^2$$

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right)c^2dt^2 +$$
$$\left[1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right]^{-1} \frac{x^2dx^2+y^2dy^2+}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$\frac{(z+R)^2dz^2+2xydxdy+2x(z+R)dxdz+2y(z+R)dydz}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$-\frac{x^2dx^2+y^2dy^2+(z+R)^2dz^2+2xydxdy+}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$\frac{2x(z+R)dxdz+2y(z+R)dydz}{x^2+y^2+(z+R)^2} + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right)c^2dt^2 +$$
$$\left(-1 + \left[1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right]^{-1}\right) \times$$

$$\frac{x^2dx^2+y^2dy^2+(z+R)^2dz^2+2xydxdy+2x}{x^2+y^2+(z+R)^2}$$
$$\frac{(z+R)dxdz+2y(z+R)dydz}{x^2+y^2+(z+R)^2}\; dx^2 + dy^2$$
$$+dz^2 \qquad (3.30)$$

Jika pada pecahan dalam bentuk persamaan (3.30) masing-masing pembilang dan penyebut dibagi dengan R, maka bentuk di atas dapat dituliskan menjadi

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m/R}{\sqrt{1+\left(\frac{2z}{R}\right)+(x^2+y^2+z^2)/R^2}}\right)$$
$$c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}\right)^{-1}$$
$$\left[-1 + \left(1 - \frac{2m/R}{\sqrt{1+\left(\frac{2z}{R}\right)+(x^2+y^2+z^2)/R^2}}\right)^{-1}\right] \times$$
$$\left[\frac{x^2}{R^2}dx^2 + \frac{y^2}{R^2}dy^2 + \left(1+\frac{z}{R}\right)^2dz^2 + \frac{2xy}{R^2}dxdy + \frac{2x}{R}\left(1+\frac{z}{R}\right)dxdz + \frac{2y}{R}\left(1+\frac{z}{R}\right)dydz\right] \qquad (3.31)$$

Selanjutnya ditinjau daerah kecil (lokal) di sekitar pusat serta diasumsikan bahwa R cukup besar sehingga $|x/R|$, $|y/R|$ dan $|z/R|$ << 1. Namun dalam hal ini tidak diasumsikan *m*/*R* << 1 sehingga tidak digunakan pendekatan medan lemah. Dengan mengabaikan suku orde kedua dalam $|x/R|$, $|y/R|$ dan $|z/R|$ pada pers. (3.31), diperoleh ungkapan orde pertama metrik Schwarzschild sebagai

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2mz}{R^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2$$
$$+\frac{4m}{R}\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{R}dxdz + \frac{y}{R}dydz\right)$$
$$+\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}dz^2 \qquad (3.32)$$

Dari metrik persamaan (3.32) di atas, tampak bahwa metrik tersebut mengandung dua bagian yaitu bagian tensor metrik diagonal yang nantinya akan ditunjukkan sama dengan elemen garis kerangka dipercepat seragam.

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{2mz}{R^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + \left(1-\frac{2m}{R}+\frac{2mz}{R^2}\right)^{-1} dz^2$$

Serta bagian tensor metrik tak diagonal yang menyumbang pada kelengkungan.

$$\frac{4m}{R}\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{R}dxdz+\frac{y}{R}dydz\right)$$

3.3 KERANGKA DIPERCEPAT SERAGAM

Ditinjau kerangka dipercepat (*accelerating frame*) untuk dilakukan perbandingan dengan pendekatan pertama metrik Schwarzschild (3.32). Untuk tujuan tersebut, ada dua persyaratan yang harus dipenuhi :

1. Sebuah partikel bebas di kerangka dipercepat harus memiliki percepatan yang sama dengan gerak partikel secara radial pada ruji *R* pada metrik Schwarzschild.
2. Waktu koordinat harus sama dengan waktu koordinat Schwarzschild.

Untuk gerakan murni radial dalam metrik Schwarzschild, percepatan sebuah partikel bebas pada ruji *r* = *R* diberikan sebagai

$$\left.\frac{d^2r}{d\tau^2}\right|_{r=R} = -\frac{mc^2}{R^2} \tag{3.33}$$

untuk 0 < R < ∞ serta tak bergantung pada kecepatan partikel. Oleh karena itu, dengan sumbu z sebagai arah percepatan, sebuah partikel yang bergerak bebas sepanjang sumbu z dalam kerangka dipercepat akan memiliki percepatan

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{mc^2}{R^2} \tag{3.34}$$

Dan tak gayut kecepatan partikel.
Misalkan sebuah metrik memiliki bentuk

$$-c^2d\tau^2 = -\alpha^2(z)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + \beta^2(z)dz^2 \tag{3.35}$$

dengan fungsi α(z) dan β (z) ditentukan oleh persyaratan pada pers. (3.34). Pemilihan bentuk (3.35) ini tentu saja sedemikian rupa agar dapat kita dapat memanfaatkan prinsip kesetaraan untuk menghubungkan kedua metrik. Metrik (3.35) dapat dituliskan menjadi

$$d\tau^2 = \alpha^2(z)dt^2 - c^{-2}(dx^2+dy^2+\beta^2(z)dz^2) \tag{3.36}$$

Ditinjau gerakan partikel bebas yang memenuhi persamaan geodesik

$$2\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu v}\frac{dx^v}{d\tau}\right) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{3.37}$$

Partikel yang bergerak jatuh bebas ini adalah partikel uji, dengan massa yang amat kecil sehingga efeknya pada kelengkungan ruang akibat keberadaannya dapat diabaikan. Ditinjau gerakan pada sumbu z (dx = dy = 0), sehingga metrik (3.35) menjadi

$$d\tau^2 = \alpha^2dt^2 - c^{-2}\beta^2dz^2 \tag{3.38}$$

yang jika masing-masing ruas dibagi dengan $d\tau^2$ kemudian diatur, dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d\tau^2}{d\tau^2} = \alpha^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - c^{-2}\beta^2\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$1 = \alpha^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{\beta^2}{c^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$1-\alpha^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\beta^2}{c^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$\alpha^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1+\frac{\beta^2}{c^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}+\frac{\beta^2}{c^2\alpha^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \tag{3.39}$$

Dengan komponen tensor metrik dari persamaan (3.38) adalah

$$g_{tt} = g_{11} = \alpha^2 \quad \text{dan} \quad g_{zz} = g_{22} = -c^{-2}\beta^2$$

Dengan menggunakan persamaan (3.37), sehingga persamaan geodesik untuk z dapat dihitung. Maka persamaan geodesik untuk g_{zz} adalah

$$2\frac{d}{d\tau}\left(g_{zz}\frac{dx^2}{d\tau}\right) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^2}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$2\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{\partial g_{11}}{\partial z}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} - \frac{\partial g_{22}}{\partial z}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau}$$

$$2\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(\alpha^2)\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\right)\frac{dz}{d\tau}\frac{dz}{d\tau}$$

$$2\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\right) = 2\alpha\frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\frac{\beta}{c^2}\frac{d\beta}{dz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \tag{3.40}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.39) ke dalam (3.40) akhirnya diperoleh

$$\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\right) = \alpha\frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{\beta}{c^2}\frac{d\beta}{d\tau}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\right) = \alpha\frac{d\alpha}{dz}\left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{c^2\alpha^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right] + \frac{\beta}{c^2}\frac{d\beta}{d\tau}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{\beta^2}{c^2\alpha}\frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \frac{\beta}{c^2}\frac{d\beta}{d\tau}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{\alpha\beta^2}\frac{d\alpha}{dz} - \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{\alpha\beta^2}\frac{d\alpha}{dz} - \left[\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz}\right]\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \quad (3.41)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.34) dan (3.41), diperoleh

$$-\frac{mc^2}{R^2} = -\frac{c^2}{\alpha\beta^2}\frac{d\alpha}{dz} - \left[\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz}\right]\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$

Dan dengan mengasumsikan bahwa $\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz}\right] = 0$, sehingga diperoleh

$$-\frac{mc^2}{R^2} = -\frac{c^2}{\alpha\beta^2}\frac{d\alpha}{dz}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} = \frac{m\beta^2}{R^2} \quad (3.42)$$

Serta

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dz} = 0 \quad (3.43)$$

Persamaan (3.43) dapat disederhanakan menjadi

$$ln\alpha\beta = 0 \quad (3.44)$$

Atau

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \quad (3.45)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.45) kedalam persamaan (3.42) sehingga diperoleh

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} = \frac{m\beta^2}{R^2}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz} = \frac{m}{\alpha^2R^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{m}{\alpha R^2}$$

$$\alpha\, d\alpha = \frac{m}{R^2}\, dz$$

Dengan mengintegralkan persamaan terakhir diatas

$$\int \alpha\, d\alpha = \int \frac{m}{R^2}\, dz + K_1$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{mz}{R^2} + K_1$$

$$\alpha^2 = \frac{2mz}{R^2} + 2K_1$$

Dengan $2K_1 = K$

Maka

$$\alpha^2 = \beta^{-2} = K + \frac{2mz}{R^2} \quad (3.46)$$

dengan K adalah tetapan integrasi. Dengan substitusi persamaan (3.46) ke dalam persamaan (3.36) diperoleh metrik

$$d\tau^2 = \left(K + \frac{2mz}{R^2}\right)dt^2 - c^{-2}\left(dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\left(K + \frac{2mz}{R^2}\right)}dz^2\right)$$

$$-c^2d\tau^2 = -\left(K + \frac{2mz}{R^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + \left(K + \frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}dz^2 \quad (3.47)$$

Selanjutnya dipilih untuk tetapan integrasi K adalah

$$K = 1 - \frac{2m}{R} \quad (3.48)$$

Sehingga persamaan (3.47) menjadi

$$-c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2mz}{R^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}dz^2 \quad (3.49)$$

Jika kita lihat, tampak bahwa persamaan metrik (3.49) di atas sama dengan bagian diagonal dari metrik (3.32). Ini menunjukkan bahwa bagian diagonal metrik (3.32) berkorespondensi dengan elemen garis dalam kerangka dipercepat beraturan dalam ruang- waktu datar seperti yang terdapat pada metrik (3.49). Adapun bagian tak diagonal dari metrik (3.32) yaitu suku

$$\frac{4m}{R}\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{2mz}{R^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{R}dxdz+\frac{y}{R}dydz\right) \quad (3.50)$$

berhubungan dengan kelengkungan ruang yang berimplikasi pada penyimpangan geodesik. Dari persamaan (3.49) dan (3.32) dalam transformasi metrik Schwarzschild yang menghasilkan dua suku yang membentuk persamaan medan gravitasi Einstein lemah dan statik teori gravitasi Einstein yang tereduksi didalam adanya kesamaan antara massa gravitasi dan massa inersial yang memandang konsep Teori Relativitas Umum. Didalam Teori Relativitas Umum, kalau benda bergerak mendekati kecepatan cahaya maka ruang akan melengkung dan karena cahaya tidak memiliki massa dan cahaya bergerak dengan kecepatan konstan c sehingga cahaya beregerak dengan lintasan garis lurus.

IV. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Teori Relativitas Umum Einstein memandang konsep metrik Schwarzschild dan massa gravitasi sebagai suatu kesatuan dan memiliki komponen tensor metrik.
2. Didalam prinsip kesetaraan yang telah dibahas dengan adanya konsekuensi prinsip kesetaraan yaitu kesamaan antara massa gravitasi dengan massa inersial. Dari prinsip kesetaraan inilah disinggung hubungan antara efek lokal gravitasi dari metrik Schwarzschild pada ruang lengkung yang ditransformasi dari koordinat spasial polar ke koordinat tegak lurus dengan kerangka dipercepat seragam dalam ruang waktu datar yang memilki hubungan didalam persamaan (3.32) dan (3.50).
3. Hubungan antara transformasi metrik Schwarzschild dan kerangka dipercepat seragam adalah dapat dipilih suatu metrik sebagai solusi persamaan geodesik pada kerangka dipercepat seragam sedemikian yang memiliki bentuk yang sama pada bagian diagonal metrik transformasi Schwarzschild di koordinat XYZ. Namun demikian, bagian tak diagonal pada metrik Schwarzschild yang tidak memiliki padanan pada metrik kerangka dipercepat. Hal ini yang menunjukkan bahwa bagian tak diagonal kerangka dipercepat seragam memiliki kontribusi pada penyimpangan geodesik.
4. Didalam tensor metrik pada persamaan (3.49) yang merupakan fungsi z, maka koordinat z tidak mengukur jarak pribadi pada arah z dalam ruang-waktu datar. Dan juga, sebuah foton ($dt = 0$) yang bergerak sepanjang sumbu z tidak memiliki kecepatan konstan c namun merupakan fungsi z. Kedua metrik akan kembali ke metrik Minkowski jika $m = 0$.
5. Tensor metrik Schwarzschild membuktikan kebenaran Teori Relativitas Umum dan adanya kesetaraan antara massa gravitasi dan massa inersial yang ditujukan oleh suku pertama dan kedua dari hasil transformasi pada persamaan (3.49) dan (3.50).

Daftar Pustaka

Anugraha, R. 2005. *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Anugraha, R. 2005. *Transformasi Metrik.* Jurnal Fisika FMIPA UGM.

Lawden, D. F, 1982, *An Introduction to Tensor, Relativity and Cosmology*, 3-rd Edition, John Wiley and Sons.Ltd., New York.

Ohanian, H.C. 1976. *Gravitation and Space Time*. New York: W.W. Norton & Company.

Ramadhan S. D. 2005. Pendekatan Geometri Differensial dalam Teori Relativitas Umum dan Solusi 2 Soliton Persamaan Medan Einstein Axisimetrik. Skripsi. Depok : UI.

Russel, B. 2006. *Teori Relativitas Einstein*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Weinberg, Steven. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of The General Theory Relativity.* USA: John Wiley & Sons.

Wospakrik, Hans J. 1978. *Berkenalan dengan Teori Kerelatifan Umum Einstein & Biografi Albert Einstein*. Bandung: ITB.

Wospakrik, Hans J. 1972. *Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika*. Bandung: ITB.